Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

основная общеобразовательная школа №19

Элементы стохастического анализа в основной школе.

Методические разработки для учителей математики

п. Железнодорожный, 2013

Аннотация

Данная работа представляет собой методические разработки для учителей математики при изучении темы «Комбинаторика, теория вероятностей, статистика в 9 классе основной школы». Методические разработки данной работы окажут помощь учителям математики при подготовке и проведении уроков по данной теме в 9 классе.
В работе использован личный опыт работы по теме и дополнительная методическая литература.
К работе имеется приложение в форме презентации Power Point. Слайды содержат разработки уроков по комбинаторике, самостоятельные работы по статистике, индивидуальную и исследовательскую деятельность учащихся по данной теме.

Карманова О. В. Элементы стахостического анализа в основной школе
2013 год. -31с.

Содержание

1.Введение.

Принятию в 2004 году решения о включении в образовательный стандарт статистики и теории вероятностей предшествовало почти десятилетнее обсуждение в педагогической среде. Материал данной темы необходим, прежде всего, для формирования у учащихся функциональной грамотности – умения воспринимать и критически анализировать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей, производить простейшие вероятностные расчёты. Изучение основ комбинаторики позволит учащемуся осуществлять рассмотрение случаев, перебор и подсчёт числа вариантов, в том числе в простейших прикладных задачах. При изучении статистики и вероятности обогащаются представления о современной картине мира и методах его исследования, формируется понимание роли статистики как источника социально значимой информации и закладываются основы вероятностного мышления. Появился ряд отдельных пособий, посвящённых изложению статистики и теории вероятностей в школе.
Неоспорим факт, что математик и учитель математики – это не одно и то же. Математик должен решить задачу, причём очень сложную. Учитель должен научить других это делать. Учитель должен «перевести» решение математика на понятный слушателю язык, сделать мысль доступной пониманию других, разложить всё по полочкам. Учитель должен направить мысль ученика на поиск решения, а видя неверный ответ, найти дефект в рассуждениях, который привёл к ошибке. Учитель знает много разных хитростей: мнемонические правила для запоминания, разделение задач на разные удобные для обучения виды, ещё он знает, где в его науке хранятся ключевые идеи, которые упустить нельзя, потому что на них опирается дальнейшее обучение. Всё вышеназванное - есть методика преподавания предмета. Проблема в том, что во время обучения в педагогическом вузе мы не изучали курс «Методика преподавания теории вероятностей и статистики в школе». Его просто не существовало. Значит, каждый педагог должен самостоятельно создавать эту методику методом проб и ошибок. В нашей российской школе отсутствует традиция преподавания данного предмета. Я в своей работе хочу поделиться опытом преподавания данной темы.

2.Основная часть

2.1 Характеристика темы

Преподавание курса «Теория вероятностей и статистика», по моему мнению, требует от учителя кардинального изменения стиля своей работы: организация дискуссий, интенсивной устной работы, расширения собственного кругозора в областях других наук: биологии, географии, истории, литературы, и многое другое в дополнение к привычным методам и подходам к обучению. Мы привыкли вести «письменный» предмет со всеми присущими ему чертами: серьёзность, многократный повтор одних и тех же алгоритмов. А на уроках по «Теории вероятности» надо решить несколько задач, абсолютно непохожих друг на друга. Задачи, стоящие в учебнике рядом, не аналогичны, решение одной из них не означает, что будет с лёгкостью решена и следующая! Ни на каком уроке алгебры перед учениками не проходит такой калейдоскоп разнообразных по сюжету и способу решения задач. Содержание, конечно, усложняется, но способ деятельности и ученика, и учителя остаётся неизменным: есть правило – применяй!

Аналогичные изменения должны произойти и в позиции ученика: должно измениться поведение учащегося на уроке и при подготовке к нему. Но дети привыкли к определённому стилю преподавания математики, требующему от них умения решать пусть и обширный, но заранее очерченный круг заданий. Зачастую они довольствуются тем, что умеют многократно воспроизводить изученный алгоритм и даже противятся попыткам решить задачу другим способом. Ещё труднее решать с учениками нестандартные задачи. Значит, необходимо создание социальной среды, способствующей этим изменениям, и погружение в неё учащихся. Это – проведение практических работ, экспериментов, исследовательской и проектной деятельности непосредственно в ходе урока, активное участие в дискуссии, поиск информации за пределами школьного учебника, привлечение к работе на уроке и дома ИКТ. Эти требования усложняют жизнь и ученику, и учителю.

Изучение теории вероятности и статистики должно изменить и отношение учеников к случайному, которое часто идёт вразрез с имеющимися у детей представлениями. Жизненный опыт учеников, фантазия порой только мешают, уводя в сторону от решения задачи. В опыте с монетой они видят не два исхода (орёл, решка) или хотя бы три (добавим пресловутое ребро), но гораздо больше: подброшенную монету уносит птица, влетевшая в окно; монета падает на люстру… богатое воображение учащихся подлежит жёсткому ограничению с самых первых уроков, когда мы определяем понятия «случайный эксперимент», «его исход», и говорим, что никакие фантастические условия не происходят во время его проведения. «Случайно – это вовсе не «всё что угодно»

Представьте что-либо подобное на уроке алгебры, когда в задаче турист сначала шёл пешком, потом ехал на машине… ни разу эта избитая формулировка не была дополнена словами: «а вдруг машина поломается?» а вероятностные задачи… Кажется, им сама судьба предписывает расшатывать устоявшиеся школьные традиции, побуждая в учащихся желание абсолютно непродуктивно досочинить своими догадками условие.

На протяжении многих уроков надо формировать новое понимание: мы ищем закон, который управляет случайными процессами без влияния везения и фантастики. Как оказалось, стихийно это понимание не образуется. Усвоение вероятностных и статистических характеристик происходит только на уроках комбинаторики, статистики и теории вероятностей, не подкрепляющихся при изучении прочих школьных предметов. На них по-прежнему царят неизбежность наступления ожидаемого результата, полная предсказуемость всех процессов. Вероятностное мышление со всем многообразием ожидаемых исходов не присутствует в их содержании.

Знакомство с современными задачами экономики, с задачами целесообразности освоения новых районов, строительства промышленных объектов и железнодорожных магистралей, выбора места строительства школ, больниц – остаётся за рамками школьного образования. Выпускник школы может и не догадываться, что за всем этим стоит современная математика.

И надо иметь в виду, что сюжетные задачи по теории вероятности, комбинаторике и статистике гораздо разнообразнее, чем алгебраические. Помимо «классических» задач: бросание кубиков, монет, вытягивание наугад разноцветных карточек, существует огромное число прочих сюжетов. Решая «новую» задачу, понять, что это «старая», только что решённая задача, но в «новой упаковке», - дело очень трудное! Не очень подготовленные ученики не видят аналогию в задачах на вытаскивание из мешка разноцветных ручек или чёрных и белых шашек.

Я на своих уроках пытаюсь использовать системно-деятельностный подход. Пересмотр целевых установок и приоритетов в определении образовательных результатов требует построения инновационных программ формирования и диагностики универсальных учебных действий и умения учиться в целом. Именно эти умения и способности востребованы в постиндустриальном обществе, поэтому они и становятся одним из наиболее значимых ожидаемых результатов образования.

Ключевое значение в процессе самостоятельной организации деятельности учения и процессах саморазвития и самосовершенствования личности, как известно, играет рефлексивная самоорганизация, то есть умение при необходимости корректировать свой способ действия путем выявления и устранения причин затруднений с помощью реконструкции и анализа хода действия. Однако данный аспект формирования УУД в настоящее время недостаточно исследован в контексте последних достижений в методологии, не обеспечен в достаточной степени методическими и диагностическими средствами. Таким образом, проблема формирования и диагностики организационно-рефлексивных общеучебных умений имеет сегодня первостепенную актуальность и значимость.

С позиций общей методологической версии теории деятельности (Г.П. Щедровицкий, О.С. Анисимов и др.) формирование любого умения (в том числе и надпредметного общеучебного умения) проходит через следующие этапы:

1.Приобретение первичного опыта выполнения действия и мотивация.

2. Формирование нового способа (алгоритма) действия, установление первичных связей с имеющимися способами.

3. Тренинг, уточнение связей, самоконтроль и коррекция.

4. Контроль.

Именно так приобретают школьники умение писать и считать, решать задачи и примеры, пользоваться географической картой и музыкальным инструментом, петь и рисовать. Этот же путь они должны пройти и при формировании общеучебных (универсальных) умений, но изучаемые алгоритмы действий будут носить уже не узко предметный, а *над*предметный характер: универсальные умения целеполагания и проектирования, самоконтроля и коррекции собственных действий, поиска информации и работы с текстами и др.

Следовательно, формирование у учащихся любого универсального учебного действия должно пройти через следующие этапы:

1) приобретение первичного опыта выполнения этого действия при изучении различных учебных предметов и мотивация к его освоению;

2) освоение способа (алгоритма) выполнения соответствующего УУД (или структуры учебной деятельности в целом);

3) отработка умения выполнять изученное УУД посредством включения его в практику учения на предметном содержании разных учебных дисциплин, организация самоконтроля его выполнения и при необходимости − коррекции;

4) контроль уровня сформированности данного УУД.

Данный теоретический вывод подтверждается многолетним опытом экспериментальной работы различных научных школ. Так, доктор психологических наук В.С. Лазарев, один из учеников В.В. Давыдова, анализируя нерешенные проблемы развивающего обучения, пишет: «Формирование учебной деятельности требует постановки и решения учебных задач особого рода – задач на освоение метазнаний о способах познания».

2.2. Психолого-педагогические особенности подростков и возможности их учета в процессе введения элементов комбинаторики, теории вероятностей, статистики

Когда учитель решает вопрос о том, как следует преподнести учащимся тот или иной учебный материал, он должен знать не только содержание соответствующего учебного предмета, но и психологические особенности учащихся, которые будут этот материал усваивать. Необходимо учитывать возрастные и индивидуальные особенности учащихся, их познавательные интересы и стили, индивидуальные интеллектуальные склонности, знать и использовать основные результаты обучения учащихся в начальной школе, среди которых приоритетным на данном этапе развития общества является формирование общеучебных умений и навыков, уровень освоения которых в значительной мере определяет успешность школьника на всех ступенях образования.

На рубеже 10-12 лет ребенок переходит на последнюю стадию – формальных операций, и примерно к 14-15 годам у него формируется мышление и логика взрослого человека.

Так же между 11-12 и 14-15 годами происходит снижение уровня исследовательской активности, от общего исследования проблемной ситуации подросток переходит к углубленному рассмотрению выделенной проблемы. Таким образом, учителю необходимо найти такие средства и способы учебной работы школьников, которые отвечают возрастным новообразованиям подростков данного возраста и задачам, которые ставит перед ними основная школа, связанных, прежде всего, с содержанием обучения.

- содержание учебных курсов основной школы выстраивается системно, что предполагает системную организацию мышления подростков;

- основная школа предъявляет недетские требования к самостоятельности, ответственности и инициативности школьников, особенно в ситуациях свободного выбора индивидуальных учебных траекторий;

-сообщество взрослых ожидает от подростков способности понимать других людей и сосуществовать с ними на принципах равноправия и терпимости.

Особое место в учении должно занять моделирование. Должны присутствовать задания, направленные на обеспечение самостоятельности детского движения, задания, связанные с понятийным развитием, с продвижением в содержании. Введению центральных понятий линии должен предшествовать этап содержательно-практической деятельности, в ходе которой знания формируются на наглядно-интуитивном уровне. Этому способствуют задания, требующие практических действий, составляющих основу формируемых умений; правила возникают как обобщенное вербальное выражение способов действий. Примерами таких упражнений могут служить следующие задания: 1) моделирование вариантов с помощью вспомогательного материала, с помощью дерева возможных вариантов, с помощью таблиц, с помощью кодирования; 2) проведение несложных экспериментов со случайными исходами; 3) сбор, регистрация данных, наглядное представление данных, чтение диаграмм, таблиц.

2.3. Дидактические принципы в содержании и построении процесса обучения основам комбинаторики, теории вероятностей и статистики

Дидактические принципы, выражая определенные закономерности обучения и передовой опыт учебно-воспитательной деятельности школы, не являются раз и навсегда установленными. Они постоянно углубляются и видоизменяются в соответствии с теми задачами, которые ставит перед школой общество.

Таким образом, дидактические принципы - это основные направляющие положения, возникающие в результате анализа научно-педагогических закономерностей и практического педагогического опыта. Они являются главным ориентиром в педагогической работе учителя.

В настоящее время в дидактике школы выделены шесть принципов: фундаментальности, непрерывности, ведущей идеи, бинарности, информатизации, комплексного подхода.

Рассмотрю возможности реализации данных принципов в процессе обучения элементам комбинаторики, теории вероятностей и статистики.

Принцип фундаментальности. Для более качественного усвоения школьниками материала на протяжении всего курса обучения следует уделять особое внимание связи обучения с жизнью, опираясь при этом на конкретные примеры. Это позволит учащимся изменить свое отношение к теории вероятностей как к абстрактной науке. Большое значение имеет вариативность введения основных понятий. Например: различные подходы к понятию вероятности (классический, статистический, геометрический, аксиоматический); вычисление искомой вероятности с помощью различных формул и сравнение полученных значений.

При изучении данного материала полезно применять алгоритмы для решения стандартных задач, а также формировать навыки самостоятельного составления алгоритмов и др. В задачах необходимо обращать внимание школьников на взаимосвязь научных и практических компонентов, выявление закономерностей, которые позволят построить математическую модель, найти алгоритм решения. Особый интерес представляют задачи, демонстрирующие связь комбинаторики, теории вероятностей и статистики с другими науками: физикой, химией, биологией, психологией, экономикой и др.

Принцип бинарности. Учащиеся должны овладеть не только основными теоретическими сведениями и практическими навыками, но и умело применять их в дальнейшем. Создание проблемной ситуации обеспечивает мотивацию постановки и необходимости решения задачи.

Принцип ведущей идеи. Три раздела новой содержательной линии — комбинаторику, теорию вероятностей, статистику — надо изучать в тесной связи друг с другом, а так же применять элементы этих разделов в традиционных разделах школьного курса математики.

Принцип непрерывности. Между знаниями, умениями и навыками, приобретаемыми учащимися на протяжении обучения в школе (а в дальнейшем и студентами в вузе; в настоящее время теория вероятностей входит в качестве обязательной дисциплины в учебные планы подготовки специалистов практически всех естественнонаучных, технических и гуманитарных дисциплин в высших учебных заведениях), должна присутствовать неразрывная связь, осуществляющаяся в соответствии с принципом непрерывности, в логичной последовательности, взаимосвязанности в содержании и методах преподавания.

Принцип информатизации обучения предполагает изменения в системе математического образования, использование современных информационных технологий на разных этапах обучения. Компьютер способен осуществлять функции контроля, тренировки, анализа, синтеза и т.д. В частности, он может быть использован для хранения, представления и обработки статистических данных; при построении графов, диаграмм, гистограмм, графиков, при создании моделей и т. д.

Принцип комплексного подхода. Формирование и развитие стохастических знаний и умений школьников должно осуществляться в системе, составляющими компонентами которой являются умения, соответствующие знаниям, общению и самосовершенствованию.

Правильное, целостное применение вышеперечисленных принципов будет способствовать повышению эффективности подготовки школьников.

2.4. Методические рекомендации по изучению основ комбинаторики, теории вероятностей, статистики

2.4.1. Планирование изучаемой темы

Я веду преподавание алгебры по учебнику Ю. Н. Макарычева и др. под редакцией С. А. Теляковского, где предусмотрено изучение этой темы в 7,8,9 классах. Где основные статистические характеристики изучаются в курсе 7 класса, наглядное представление статистической информации дается в курсе алгебры 8 класса. В данной методической разработке я предлагаю подробно разобрать формы приемы и методы преподавания главы «Элементы комбинаторики и теории вероятности» в курсе алгебры 9 класса.

Требования к уровню подготовки выпускников

Уметь

- Проводить несложные доказательства, получать простейшие следствия из известных или ранее полученных утверждений, оценивать логическую правильность рассуждений, использовать примеры для иллюстрации и контрпримеры для опровержения утверждений;
- Извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках; составлять таблицы, строить диаграммы и графики;
- Решать комбинаторные задачи путём систематического перебора возможных вариантов, а также с использованием правила умножения;
- Вычислять средние значения результатов измерений;
- Находить частоту события, используя собственные наблюдения и готовые статистические данные;
- Находить вероятности случайных событий в простейших случаях;
  Использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:
  - Выстраивания аргументации при доказательстве;
  - Распознавания логически некорректных рассуждений;
  - Анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков, таблиц;
  - Решения практических задач в повседневной и профессиональной деятельности с использованием действий с числами, процентов, длин, площадей, объёмов, времени, скорости;
  - Решения учебных и практических задач, требующих систематического перебора вариантов;
  - Сравнение шансов наступления случайных событий, оценки вероятности случайного события в практических ситуациях, сопоставления модели с реальной ситуацией. Понимания статистических рассуждений.

Всего часов 13

Основная цель: Формирование представлений математическом направлении – комбинаторике, статистике и теории вероятностей;

Номер урокка	Тема урока	Количество часов	Тип урока	Элементы содержания	Требования к уровню подготовки учащихся	Вид контроля	Домашнее задание
1	Элементы комбинаторики. Примеры комбинаторных задач	1	Изучение нового материала	Примеры комбинаторных задач	З н а т ь и понимать комбинаторное правило умножения,	Фронтальные опросы по контрольным вопросам	п. 30, № 715,718 (а), 720, 722,729 (а)
2		1	Закрепление изученного материала				п. 30, № 724,726, 728, 730 (а),731

3	Переста- новки	1	Изучение нового материала	Перестановки	У м е т ь решать упражнения и задачи, в том числе практического содержания с непосредственным применением изучаемых формул	Работа в парах на карточках	п. 31, № 733, 736, 739, 746,752 (а)
4		1	Закрепление полученных знаний			Практическая работа	п. 31, № 740 (а), 743, 747 (а, б), 749,751 (а)

Продолжение табл.

1	2	3	4	5	6	7	8
5	Размещения	1	Изучение нового материала	Размещения	У м е т ь решать упражнения и задачи, в том числе практического содержания с непосредственным применением изучаемых формул	Фронтальный опрос	п. 32, № 755,757, 759, 765 (а),766 (а)
6		1	Закрепление изученного мате-риала			Математический диктант	п. 32, № 760 (а), 762 (а), 763, 766 (б), 67
7	Сочетания	1	Изучение нового материала	Сочетания	У м е т ь решать упражнения и задачи, в том числе практического содержания с непосредственным применением изучаемых формул	Фронтальный опрос	п. 33, № 769, 771, 772 (а), 783
8		1	Применение знаний и умений			Практическая работа	п. 33, № 776 (а), 778 (а, б), 784 (а), 785 (а)

9		1	Обобщение и систематизация знаний			Индивидуальные карточки	п. 33, № 779 (а), 781, 784 (б), 786
10	Начальные сведения	1	Изучение нового материала	Случайные, достоверные, невозможные	З н а т ь и понимать теории вероятностей.	Фронтальные опросы по конт-	п. 34, № 788,790 (а),

1	2	3	4	5	6	7	8
	из теории вероятностей. Относительная частота случайного события. Вероятность равновозможных событий			события. Статистическое и классическое определение вероятности	У м е т ь : – вычислять вероятности; – использовать формулы комбинаторики	рольным вопросам	792, 796 (а)
11		1	Закрепление полученных знаний			Практическая работа	п. 34, № 793, 795, 797 (а, б)
12		1	Проверка и коррекция знаний и умений			Индивидуальные карточки	п. 35,№ 799, 801, 803,808, 818,819 (а)
13	Контрольная работа 7	1	Проверка знаний и умений	Перестановки, размещения, сочетания, вероятность равновозможных событий	У м е т ь решать задачи, используя формулы комбинаторики и теории вероятностей	Индивидуальное решение контрольных заданий	Повторить п. 30–35

2.4.2. Роль комбинаторных задач в развитии математического стиля мышления учащихся

Среди многих проблем преподавания математики в школе есть проблема формирования у учащихся математического стиля мышления.

Математическое мышление является не только одним из важных компонентов процесса познавательной деятельности учащихся, но и таким компонентом, без целенаправленного развития которого невозможно достичь эффективных результатов в обучении системе математических знаний, умений и навыков.

Рассмотрим некоторые качества мышления, образующие математический стиль мышления.

Первое качество - гибкость мышления. Гибкость мышления характеризуется: способностью к целесообразному варьированию способов действий; легкой перестройкой системы знаний, умений и навыков при изменении условий действий; легкостью перехода от одного способа действия к другому, умением выходить за границы привычного способа действий.

Второе качество - активность мышления. Активность мышления характеризуется постоянством усилий, направленных на решение некоторой проблемы, желанием обязательно решить эту проблему, изучить разные подходы к ее решению, исследовать различные варианты постановки этой проблемы в зависимости от изменяющихся условий и т. д. Развитию этого качества мышления способствует рассмотрение различных способов решения одной и той же задачи.

«Человеку, изучающему алгебру, часто полезно решить одну и ту же задачу тремя различными способами, чем решить три или четыре различных задачи. Решая одну задачу различными способами, можно путем сравнения выяснить, какой из них короче и эффективнее. Так вырабатывается опыт». У.У. Сойер.

Многие задачи допускают несколько способов решения. Часто первый избранный способ бывает далеко не самым удачным. Образно говоря, решающий задачу находится в положении человека, блуждающего по незнакомой местности. Дойдя до цели, он видит, что дорогу можно выбрать более удачную. Нахождение более простых оригинальных способов решений нередко является результатом длительной и кропотливой работы.

Умение решать задачу несколькими способами является одним из признаков хорошей подготовки школьников по математике. При отыскании различных способов решения задач у школьников формируется познавательный интерес. После нахождения очередного метода решения задачи учащийся, как правило, получает моральное удовлетворение. В результате чего ученик проявляет определенную активность мышления.

Кроме того, частое использование одного и того же метода при решении задач иногда приводит к привычке, которая становится вредной. У решающего задачу развивается инертность мышления - антипод гибкости.

Исходя из выше сказанного, можно сделать вывод, что решение задач различными способами развивает активность и гибкость мышления.

Третье качество - целенаправленность. Целенаправленность мышления характеризуется стремлением осуществить выбор действий, при решении какой - либо проблемы, постоянно ориентируясь на поставленную этой проблемой цель, а также стремлением к поиску кратчайших путей решения.

С формированием целенаправленности мышления тесно связан выбор рационального метода решения задачи.

Четвертое качество - широта мышления. Это качество характеризуется способностью к формированию обобщенных способов действий, имеющих широкий диапазон переноса и применения к частным, нетипичным действиям. Оно проявляется в готовности школьников применять новые изученные факты к решению задач и делать обобщения.

Пятое качество - глубина мышления. Это качество мышления характеризуется способностью глубокого понимания каждого из изучаемых фактов в их взаимосвязи с другими фактами.

Для формирования глубины мышления служат задачи, в которых необходимо проанализировать накопленный опыт и применить его при решении.

Здесь рассмотрены не все качества мышления, которые формируются при решении задач. Такие качества, свойственные математическому стилю мышления, как ясность, точность, лаконичность речи и записи, его доказательность не нуждаются в особых комментариях.

Рассмотрим различные решения одной комбинаторной задачи, которая рассматривается перед введением правил комбинаторики: сколько существует к-значных числовых кодов, цифры которых расположены в возрастающем порядке? (Урок одной задачи, позволяющий проанализировать, как изменение данных в условии задачи ведет к изменению в способе ее решения.)

Это трудная задача. Разобьем задачу на более простые. Итак, начнем наш путь «от простого к сложному».

№1.а) Сколько существует двузначных кодов, меньших 100, цифры которых идут в возрастающем порядке?

б) Тот же вопрос для кодов, цифры которых идут в убывающем порядке.

в) Тот же вопрос для кодов, цифры которых идут в не возрастающем порядке.

Уточним условие задачи. Цифры двузначного кода идут в возрастающем порядке, когда первая цифра меньше второй.

Решение а). Самое первое, что приходит в голову учащимся, это выписать подряд все такие коды: 01, 02, … 09, 12, 13, … ,19, 23, … ,29, 34, … ,39, … ,89 и пересчитать их. Некоторые учащиеся могут заметить, что в первом десятке кодов 9 штук, во втором - 8 штук, в третьем – 7 штук и т.д. В девятом десятке – 1 штука, а в десятом их вообще нет. Поэтому они предложат просто сложить числа 9+8+7+6+5+4+3+2+1=45 или (9+1)+(8+2)+(7+3)+(6+4)+5=45. Ответ: 45 кодов.

Решение б). Здесь, конечно, можно сделать точно такой же подсчет, как и в а), но учащимся сразу становится ясно, что ответ будет таким же, как и там. В самом деле, если в каждом коде, цифры которого идут в возрастающем порядке, поменять цифры местами, то получится код, цифры которого идут в убывающем порядке, и наоборот. Ответ: 45 кодов.

Решение в). К таким кодам относятся коды, цифры которых идут в возрастающем порядке, и коды, обе цифры которых одинаковы. Сколько есть кодов с возрастающим порядком, учащиеся уже знают – их 45 штук. Количество кодов с одинаковыми цифрами учащимся найти нетрудно. Их 10 штук: 00, 11, 22, 33 … 99.

Итого 45 + 10 = 55. Ответ: 55 кодов.

Решая задачи а), б) некоторые учащиеся заметят, что можно решить задачу а) еще более простым подсчетом. Двузначных кодов, обе цифры которых разные – 90 штук. Двузначные коды с двумя неодинаковыми цифрами разбиваются на два класса, состоящих из кодов, цифры которых идут в возрастающем порядке и из кодов, цифры которых идут в убывающем порядке, причем тех и других одинаковое количество. Следовательно, кодов, цифры которых идут в возрастающем порядке 90/2=45 штук.

Оказывается, что задачу № 1(а) можно представить геометрически. Пусть на плоскости имеется 10 точек. Сколько существует отрезков с концами в этих точках? Занумеруем 10 точек цифрами 0, 1, 2, …, 9. Рассмотрим теперь какой-нибудь отрезок с концами в этих точках. В концах отрезка стоят две разные цифры; поставив их в порядке возрастания, мы получим двузначный код с возрастающим порядком цифр. При таком соответствии двум разным отрезкам соответствуют два разных кода и двум разным кодам соответствуют два разных отрезка. Значит, отрезков будет столько же, сколько двузначных кодов, цифры которых идут в возрастающем порядке. А таких кодов 45.

Решение с помощью теории графов. Вершины графа - различные цифры, ребра графа-связи между цифрами. Найдем сумму степеней вершин графа. Каждая вершина имеет степень 9 (количество ребер, выходящих из вершины), сумма степеней вершин – 90. Количество ребер в графе 90:2=45.

№2. Сколько существует трехзначных числовых кодов, цифры которых идут в возрастающем порядке?

Решение №2. Трехзначные коды, цифры которых идут в возрастающем порядке, это коды, у которых вторая цифра больше первой, а третья – больше второй. Следовательно, у таких кодов все три цифры разные. Разобьем их на классы. Если коды состоят из одних и тех же трех цифр и отличаются только порядком, в котором они поставлены, то мы их относим к одному классу. Всякий код, таким образом, попадает только в один из классов.

Покажем теперь, что в каждый класс попадает ровно шесть кодов, и, кроме того, среди них есть только один код, цифры которого идут в возрастающем порядке.

Пусть a, b, c – какие-то три разных цифры и пусть a > b > c. Тогда из них можно составить только шесть различных кодов: abc, acb, bac, bca, cab, cba и из них только у одного кода, cba цифры идут в возрастающем порядке. Отсюда мы можем заключить, что если N – количество кодов, у которых все три цифры разные, то количество классов, на которые мы их разбили, будет равно N/6. Кроме того, поскольку в каждом классе есть только один код с возрастающим порядком цифр, таких кодов будет столько же, сколько классов, то есть N/6 штук. Осталось найти N, то есть решить следующую задачу.

Сколько существует трехзначных кодов с разными цифрами?

Решая №1, мы нашли, что двузначных коды с разными цифрами 90 штук. Приписывая впереди к каждому такому двузначному коду по одной из 8 цифр, не содержащихся в этом коде, мы, очевидно, получим все различные трехзначные коды с разными цифрами.

Двузначные коды с разными цифрами						Трехзначные коды с разными цифрами		
01	201	301	401	501	601	701	801	901
02	102	302	402	502	602	702	802	902
…	…							
10	210	310	410	510	610	710	810	910
12	012	312	412	512	612	712	812	912
…	…							
18	018	218	318	418	518	618	718	918
19	019	219	319	419	519	619	719	819
…	…							
97	097	197	297	397	497	597	697	897
98	098	198	298	398	498	598	698	798

Таким образом, всего кодов с тремя разными цифрами будет равно 90·8=10·9·8 штук.

Мы нашли, что N =720; разделив N на 6, мы получим ответ 120 кодов.

Ответ к №2. 120 трехзначных числовых кодов, цифры которых идут в возрастающем порядке.

№3. Сколько существует 4-значных числовых кодов, цифры которых идут в возрастающем порядке?

Аналогичные рассуждения применяем для нахождения числа кодов с четырьмя разными цифрами. Число таких кодов равно 720·7=5040. Как и в предыдущем случае разобьем эти коды на классы, в каждый из которых войдут коды, состоящие из одних и тех же трех цифр и отличающиеся только порядком расположения цифр. Пусть d, a, b, c – какие-то цифры, причем d >a > b > c. Будем составлять из них коды. Если фиксировать цифру d на первом месте, то получится 6 вариантов расстановок dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba. Если фиксировать любую из оставшихся цифр на первом месте, то для каждой получится 6 вариантов расстановок. Тогда из цифр d, a, b, c можно составить только 4·6=24 различных кода. Из них только у одного кода, cbad цифры идут в возрастающем порядке. Поэтому 5040:24=210 четырехзначных числовых кодов, цифры которых идут в возрастающем порядке.

№4. Сколько существует восьмизначных кодов, цифры которых идут в возрастающем порядке?

Решение №3. Ответ: столько же, сколько двузначных, то есть 45 кодов.

Докажем это. Выпишем в строку все десять цифр в порядке возрастания: 0123456789. Возьмем двузначный код, цифры которого идут в возрастающем порядке, и вычеркнем его цифры из этой строки. Мы получим в результате восьмизначный код, цифры которого идут в возрастающем порядке, например:

07 ® 0123456789 , то есть 12345689; 26 ® 0123456789 , то есть 01345789.

Таким образом, каждому двузначному коду с возрастающим порядком цифр мы сопоставили один восьмизначный код с возрастающим порядком цифр. Теперь наоборот, возьмем какой-нибудь восьмизначный код, цифры которого идут в возрастающем порядке, и, составив двузначный код из двух цифр, которые не вошли в этот восьмизначный код, поставим эти две цифры в порядке возрастания, например: 12346789® 05.

Таким образом, каждому восьмизначному коду мы сопоставим один двузначный код. Очевидно, что в первом и во втором случаях двум разным кодам соответствуют два разных кода.

Мы установили взаимно однозначное соответствие между двузначными и восьмизначными кодами с возрастающим порядком цифр. Следовательно, и тех, и других одинаковое количество.

Аналогичные рассуждения при к=6 (столько же, сколько четырехзначных кодов), к=7 (столько же, сколько трехзначных кодов).

№5. Сколько существует 10-значных числовых кодов, цифры которых идут в возрастающем порядке?

Ответ очевиден, только один код.

№6. Сколько существует 11-значных числовых кодов, цифры которых идут в возрастающем порядке?

Ответ: таких кодов нет. В самом деле, у каждого такого кода все 11 цифр должны быть разными, но всего есть только 10 различных цифр.

Значит, не существует к-значных числовых кодов, цифры которых идут в возрастающем порядке при к>10.

При рассмотрении такого блока у учащихся развивается способность к целесообразному варьированию способов действий, они учатся перестраивать систему знаний, умений и навыков при изменении условий действий, переходить от одного способа действия к другому, учатся выходить за границы привычного способа действий. У учащихся появляется желание обязательно решить эту проблему, изучить разные подходы к ее решению, исследовать различные варианты постановки этой проблемы в зависимости от изменяющихся условий. Они стремятся осуществить выбор действий, постоянно ориентируясь на поставленную этой проблемой цель. Так же у учащихся формируются обобщенные способы действий.

2.4.3. Введения понятий размещений, перестановок и сочетаний

Многие исследователи признавали особую роль понятийного мышления в структуре интеллекта, рассматривая способность к понятийному отражению как высшую стадию интеллектуального развития, а понятийную мысль - как один из наиболее эффективных познавательных инструментов.

Л.С. Выготский считал, что образование понятий играет ключевую роль в процессе интеллектуального развития, поскольку «... именно образование понятий является основным ядром, вокруг которого располагаются все изменения в мышлении подростка». По мере формирования понятийного мышления не только происходит перестройка связей между отдельными познавательными функциями, но наблюдается изменение природы каждой отдельной познавательной функции.

В старшей школе при изучении комбинаторики вводятся понятия размещений, перестановок, сочетаний. Изучение основных комбинаторных схем можно проводить или на языке выборок, или на языке множеств. Я отдаю предпочтение первому подходу. Во-первых, для учащихся оказывается сложными понятия упорядоченного множества (для размещения без повторений), кортежа (для размещения с повторениями). Во-вторых, язык выборок позволяет опираться на содержание конкретной рассматриваемой задачи. В-третьих, в математической статистике используются понятия генеральной совокупности и выборки.

Приведу возможный вариант введения понятий размещений, сочетаний, перестановок без повторений с помощью выборок.

С целью экономии учебного времени и для большей четкости и ясности излагаемого материала подбираю минимальное количество подготовительных задач. Так как наилучшие результаты получаются в тех случаях, когда одна и та же подготовительная задача используется несколько раз при изложении новой темы, помогая оттенить различные ее моменты. Рассмотрим 5 квадратов различных цветов (красный, синий, зеленый, белый, желтый).

Назовем генеральной совокупностью без повторений набор некоторого конечного числа различных элементов: $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. Наглядному представлению такой генеральной совокупности может послужить набор из наших *5* квадратов ($n=5$). Выборкой объема $к$ $(к < n)$ будем называть произвольную группу из к элементов данной генеральной совокупности.

Наглядному представлению такой выборки может служить пестрая лента, построенная из *к* квадратов различной окраски. Рассматриваем пример с построением ленты из 3 квадратов, взятых из 5 квадратов различных цветов. Каким минимальным признаком могут отличаться узоры двух пестрых лент, построенных из одинакового количества квадратов? Ответы учащихся: отличаются составом квадратов, порядком расположения квадратов.

Каким минимальным признаком может отличиться одна выборка объема *к* от другой выборки такого же объема? Минимальным признаком, отличающим одну выборку объема *к* от другой выборки такого же объема, может быть (установление существенных признаков):

их различие по крайней мере одним элементом (а)

или их различие порядком расположения элементов. (б)

Назовем такие выборки размещениями без повторений из *n* элементов по *к*.

Строим с учащимися такую наглядную схему рассуждений:

Выборки объема *к* из генеральной совокупности без повторений объема *n*

когда одна от другой отличаются по крайней мере одним элементом или
порядком расположения элементов

↓

Размещения без повторений из *n* элементов по *к*

Отсюда следует определение понятия:

Размещениями без повторений из *n* элементов по *к* называются такие выборки, которые, имея по *к* элементов, выбранных из числа данных *n* элементов генеральной совокупности без повторений, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Обозначение числа размещений $A^к_n$ (от фр. "arangement" – размещение (приведение в порядок)).
Характерный пример размещений без повторений — вся совокупность трехзначных номеров, в каждом из которых нет повторения цифр. Учащиеся приводят свои примеры.

Рассматриваем с учащимися задачу. Сколько лент из 3 квадратов можно построить из 5 квадратов различных цветов? Предыдущий опыт подсказывает учащимся, что надо воспользоваться правилом произведения. Они быстро находят ответ 5·4·3=60 вариантов.

Определяем число размещений без повторений из *n* элементов по *к*. Пусть имеем *n* различных элементов. Сколькими способами можно выбрать первый элемент? Ответ: *n* способами. Второй элемент? Ответ: *n—1* способом, т.к. его приходится выбирать из оставшихся *n—1* элементов. Сколькими способами можно образовать пары элементов? Ответ: *n(n—1)* способами по правилу произведения. Учащиеся продолжают рассуждения. Третий элемент придется отбирать из числа оставшихся *n—2* элементов. Это можно сделать *n—2* способами. Тогда тройки элементов можно образовать *n(n—1)(n—2)* способами. Аналогично четверки можно образовать *n(n—1)(n—2)(n—3)* способами, а размещения из *n* по *к* элементов *n(n—1)(n—2)...(n—(к—1))* способами. Таким образом, у нас получается формула:

$$A^{к}_{n} = n(n-1)(n-2)...(n-к+1.) \qquad (1)$$

Формулу (1) преобразуем, умножая и деля правую часть на произведение

$(n-к)\ (n-к-1)\ (n-к-2)...3 \cdot 2 \cdot 1.$

Получаем: $A^{к}_{n}=(n(n-1)(n-2)...\ 3 \cdot 2 \cdot 1) : (\ (n-к)\ (n-к-1)\ (n-к-2)...3 \cdot 2 \cdot 1).$

Математики ввели специальное название для произведения $n(n-1)(n-2)...\ 3 \cdot 2 \cdot 1.$

Такое произведение называется факториалом числа *n* и обозначается символом *n!*

Причем принято считать, что $0! = 1$.

Формула (1) теперь приобретает удобную для запоминания форму: $A^{к}_{n}=n! :(n - к)!$

В случае, когда *к=n,* одно размещение от другого отличается только порядком расположения элементов (выбор существенного признака (б) в качестве основного). (Рассматривается пример с лентой, построенной из всех 5 квадратов). Такие размещения называются перестановками без повторений. Рассуждения оформляем в виде схемы:

Выборки объема *к* из генеральной совокупности без повторений объема *n*

когда обладают или признаком (а), или (б) ↓

Размещения без повторений из *n* элементов по *к*

когда *к = n* и обладают признаком (б) и только (б) ↓

Перестановки без повторений из *n* элементов

По схеме учащиеся выводят определение:

Перестановками без повторений из *n* элементов называются размещения без повторений из *n* элементов по *n,* т. е. размещения, отличающиеся одно от другого только порядком расположения элементов.

Обозначение числа перестановок $\boldsymbol{P_n}$ (от фр. "permutation" - перестановка)
Характерный пример перестановок без повторений — вся совокупность всех десятизначных номеров, в каждом из которых нет повторения цифр. Учащиеся приводят свои примеры.

Считаем число лент составленных из 5 различных квадратов. Получаем *5!*

По определению и формуле (1) имеем: $P_n = A^{n}_{n}= n(n-1)(n-2)...\ 3 \cdot 2 \cdot 1$, т. е. $P_n = n!$ (2)

Среди размещений без повторений из *n* элементов по *к* *(к<n)* можно выделить такие, которые отличаются одно от другого (а) и только (а) признаком (выбор существенного признака (а) в качестве основного).

Рассматриваем составление наборов из 3 квадратов, взятых из 5 различных квадратов. Такие размещения называются сочетаниями без повторений. Строим с учащимися схему рассуждений:

Выборки объема *к* из генеральной совокупности без повторений объема *п*

↓ когда обладают или признаком (а), или (6)

Размещения без повторений из *п* элементов по *к*

↓ когда *к*<*п* и обладают признаком (а) и только (а) (неупорядоченные выборки)

Сочетания без повторений из *п* элементов по *к*

По схеме учащиеся выводят определение:

Сочетаниями без повторений из *п* элементов по *к* называются такие размещения без повторений из *п* элементов по *к*, которые одно от другого отличаются хотя бы одним элементом.

Обозначение числа сочетаний $C^к_n$ (от фр. "combinaison" - сочетания)

Решаем с учащимися следующую задачу. Сколькими способами можно составить наборы из 3 квадратов, взятых из 5 квадратов разного цвета?

Обозначим: красный квадрат— к, зеленый— з, синий— с, т.д. Составим и запишем одну из возможных выборок: *ксб.* Если мы будем переставлять элементы в этой выборке, то получим *3!=6* вариантов выборок *кбс, бкс, скб, ксб, скб, сбк.* Все выборки из 5 по3 можно разбить на шесть классов, в каждом классе будет только одна интересующая нас выборка (т.к. порядок расположения элементов в наборе квадратов не важен). Количество всевозможных выборок (число размещений) 5·4·3=60 делим на 6, получаем 10 способов составления наборов из 3 квадратов, взятых из 5 квадратов разного цвета.

Значит, формула для числа сочетаний легко получается из формулы для числа размещений. Действительно, если составить сначала все *k*-сочетания из *n* элементов, а потом переставить входящие в каждое сочетание элементы всеми возможными способами. При этом получатся все *k*-размещения из *n* элементов, причем каждое только по одному разу. Но из каждого *k*-сочетания можно сделать *k!* перестановок, а число этих сочетаний равно $C^к_n$. Значит, справедлива формула $k!C^k_n = A^k_n$. Из этой формулы находим, что $C^k_n = \frac{A^k_n}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, т.е. $C^к_n \cdot P_к = A^к_n$. Значит, $C^k_n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. (3)

Характерный пример сочетаний без повторений — всевозможные варианты состава делегации в количестве, например, трех человек от коллектива, в котором 15 человек.

В результате обсуждения появляется схема (модель системы понятий, имеющая логическую структуру):

Выборки объема *к* из совокупности *п* различных элементов

↓ если одна от другой отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения

Размещения без повторений объема *к* из *п* данных элементов. Их число $A^к_n = n! : (n — к)!$

↙	↘
если одно от другого отличаются только порядком расположения элементов	если одно от другого отличаются хотя бы одним элементом Сочетания без повторений объема *k* из данных *n* элементов. Их число

Представленные схемы появляются как продукт анализа, синтеза, обобщения материала. Последняя схема позволяет разом охватить все множество вводимых понятий и проследить отношения между ними. Психологами было показано, что отношения между объектами сохраняются в памяти учащихся значительно дольше. Если объекты расположены в строго продуманной системе, то их восприятие требует минимальных усилий.

Этот способ позволяет по аналогичной схеме ввести понятия размещений, перестановок, сочетаний с повторениями. Приведенные здесь определения (через выборки) более удобны при решении задач, в которых приходится устанавливать, имеем ли мы дело с размещениями, сочетаниями или перестановками.

Исаак Ньютон утверждал, что "при изучении наук примеры полезнее правил". Пример - это яркий образ, правило же - это сухая схема. Рассмотрим вывод свойств сочетаний посредством решения конкретных задач.

Заметим, что выбор *к* участников олимпиады равносилен выбору *п—к* учеников, не участвующих в олимпиаде. Поэтому число способов, которым можно выбрать *к* человек из *п,* равно числу способов, которым можно выбрать *п — к* человек из *п,* то есть $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Предположим, что в классе учится *п* человек. Зафиксируем какого-нибудь ученика класса (обозначим его через *А*). Разобьем все возможные команды по *к* человек на две группы: те, в которые *А* входит, и те, в которые *А* не входит. Число команд в первой группе равно $C^{к-1}_{n-1}$ - надо дополнить команду еще *к—1* учениками, выбрав их из *п-1* оставшихся. Число команд во второй группе равно $C^к_{n-1}$ - теперь из оставшихся *п-1* учеников надо выбрать полную команду. Поэтому $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Приведенные задачи позволили без всяких вычислений доказать содержательные факты (свойства сочетаний). Подобное явление вообще характерно для комбинаторики. Часто несколько минут размышлений (проникновения в комбинаторный смысл задачи) могут избавить от громоздких вычислений.

2.4.4. Математическое моделирование – необходимый компонент обучения теории вероятностей

Итак, чтобы решить задачу математически нужно правильно построить ее модель. Модель эксперимента со случайными исходами включает в себя перечисление всех возможных исходов. Мы должны перечислить все исключающие друг друга исходы такие, что результатом каждого эксперимента обязательно является один из них (элементарные исходы или элементарные события). Так, при построении математической модели эксперимента по бросанию игральной кости естественно учесть шесть исходов, при моделировании извлечения наудачу карты из хорошо перемешанной колоды в качестве элементарных можно рассматривать исходы, изображающие появление всех возможных карт (т.е. 32, 36 или 54 исхода в зависимости от набора колоды). Из элементарных событий можно составить уже все нужные нам случаи (события). Каждое из случайных событий есть «набор» некоторого числа элементарных событий. Например, «выпадет четное число очков» означает то же самое, что появится грань с одним из номеров {2,4,6}»; событие «выпадет число очков меньшее трех» равносильно тому, что «появится грань с одним из номеров {1,2}». Чем больше имеется элементарных исходов, тем больше событий можно рассмотреть. Наконец завершить создание вероятностной модели можно, определив способ задания вероятности для всех событий в ходе эксперимента, которые представляют для нас интерес. Обычно это наиболее трудная часть.

2.4.5. Природа понятия вероятности и методика его введения

В наши дни человек постоянно сталкивается с вероятностной терминологией в политических и научных текстах, широко использует ее в повседневной речи. Она звучит в завтрашнем прогнозе погоды, когда речь заходит о вероятности дождя, в выступлении политика, когда он оценивает шансы или анализирует данные, в разговоре экономиста, организатора производства, ученого.

Одним из важнейших компонентов вероятностно-статистического стиля мышления является понимание устойчивости в мире случайностей, упорядоченности случайных фактов. Нельзя допустить, чтобы стихийно воспринимаемые в жизни отдельные стороны случайных явлений учащиеся воспринимали вне всяких взаимосвязей. Самый простой и доступный путь состоит в формировании представлений о вероятности как о «теоретически ожидаемом» значении частоты при увеличении числа наблюдений. При этом понимание взаимоотношения между вероятностью и ее эмпирическим прообразом — частотой приводит к осознанию статистической устойчивости частоты. В то же время важную роль играет и понимание того, что количественная оценка возможности наступления некоторого события может быть осуществлена до проведения эксперимента, исходя из некоторых теоретических соображений. Таким образом мы приходим к вычислению вероятностей в классической схеме.

В 9 классе происходит постепенное усиление уровня строгости в изложении материала. Сначала можно рассмотреть классическую схему, то есть опыты с конечным числом равновозможных исходов. Равновозможные элементарные события - такие события, любое из которых по отношению к другим событиям не обладает никаким преимуществом появляться чаще другого при многократных испытаниях, проводимых в одинаковых условиях.. Выпадения герба и цифры на симметричной монете представляются равновозможными, грани правильной игральной кости одна по отношению к другой также не имеют преимуществ.

Вероятностью случайного события А называется отношение числа равновозможных элементарных событий, благоприятствующих этому событию, к числу всех равновозможных элементарных событий определяемых данным испытанием. Это — классическое определение вероятности случайного события. Полезно формуле Р(А)= т/п (m - число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию А, п - число всех равновозможных элементарных событий определяемых данным испытанием) придать наглядную иллюстрацию.

Это определение представляет собой более высокую ступень математической формализации случайного явления, чем статистическое определение. Оно свободно от расплывчатых выражений, применяемых в статистическом определении. Однако оно носит ограниченный характер, связанный с концепцией равновозможности. Классическая вероятностная модель пригодна для опытов с конечным числом равновозможных исходов. Для вычисления вероятности события в классической модели применяются комбинаторные схемы.

Определим вероятность того, что выпадет нечетное число очков при бросании правильной игральной кости. Количество равнвозможных элементарных исходов в условиях данного эксперимента - 6 (на кости могут выпасть следующие количества очков: 1,2,3,4,5,6), из них три исхода благоприятствуют нашему событию.

Можно представить множество элементарных исходов в виде прямоугольника, разделенного на равные квадраты, каждый из которых представляет некоторое элементарное событие. Выделим искомое случайное событие (подмножество, состоящее из 3 таких квадратов).

$\omega 1$ $\omega 2$ $\omega 3$ $\omega 4$ $\omega 5$ $\omega 6$

Значит, вероятность события равна 3/6=1/2.

Рисуем дерево возможных исходов, рядом с каждым его ребром записываем вероятность элементарного события. Дерево становится вероятностным. Находим искомую вероятность 1/6+1/6+1/6=3/6.

В некоторых случаях умение интерпретировать наблюдаемое событие с помощью графов является самым простым подходом к вычислению вероятности этого события. Наглядность при решении вероятностных задач способствует повышению интереса учащихся к поиску закономерностей в случайных явлениях.

Классическое определение можно рассматривать как "мостик" от эмпирических основ теории вероятностей к современной теории, которая строится на базе теоретико-множественных представлений. Действительно, с одной стороны, оно допускает наглядную частотную интерпретацию. В результате проведения с учащимися лабораторных работ (например, кладем в коробку разноцветные кружки одинакового радиуса, вырезанные из одинаковой по структуре бумаги, тщательно перемешиваем их, не глядя, извлекаем один или несколько кружков) появляется возможность сравнения частоты наступления событий и его вероятности, вычисленной на основе классического определения. Подобные занятия имеют большое воспитательное значение, показывая, что в задаче, где господствует случай, имеются свои закономерности.

С другой стороны, классическое определение вероятности может служить преддверием более общего аксиоматического определения. Равновозможные случаи, которые используются в выше названном определении, по существу представляют собой элементарные события из конечного пространства элементарных событий, в котором специальным образом задана вероятность.

При классическом подходе определение понятия вероятности сводится к более простому понятию — равновозможности элементарных событий. А это понятие основано на интуитивном воображении человеком тех условий испытания, которые вроде достоверно определяют эту равновозможность. Но не каждое испытание поддается такому воображению. Например, не может быть речи о равновозможных исходах испытания, состоящего в подбрасывании игральной кости, центр тяжести которой сознательно смещен с геометрического центра.

Каким путем следует подойти к понятию, например, вероятности выпадения шестерки при бросании такой кости? Пусть т1/п, т2/(п+1),…, тN/N — относительные частоты наступления события А в некоторой серии испытаний, каждое из которых проводится в одинаковых условиях (например, подбрасывается одна и та же игральная кость с одинаковой высоты).

Вероятностью события А называется то неизвестное число Р, около которого сосредоточиваются значения относительных частот наступления события А при возрастании числа испытаний.

Это — статистическое определение вероятности случайного события.

Вероятность события можно приближенно определить принципиально со сколько угодной высокой точностью, осуществив достаточно большое число испытаний и подсчитав частоту наступления события в этой совокупности испытаний.

Пусть стрелок производит выстрел по мишени. Как оценить вероятность попадания? Если события «попадание» и «промах» равновозможны, то ответ получаем сразу:

Р («попадание»)=1/2.

Но они могут быть неравновозможны. Скажем, первый мальчик постоянно посещает тренировки по стрельбе и каждый раз из сотни выстрелов попадает в мишень 80—90 раз, а второй на стрельбище бывает редко, поэтому из сотни выстрелов попадает только 30—40 раз. Ясно, что у первого возможность попадания больше, чем у второго. Как оценить эти разные возможности? Из практики, так, как определяется число появлений герба при подбрасывании монеты.

Произведено выстрелов	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Число попаданий первого мальчика	8	17	25	34	41	48	56	65	73	82
Число попаданий второго мальчика	4	5	8	13	15	19	22	25	28	32

Из таблицы видно, что как у первого мальчика, так и у второго отношение числа попаданий к числу произведенных выстрелов меняется. Эти отношения в какой-то мере зависят от числа произведенных выстрелов. Но вместе с тем заметно, что упомянутое отношение для каждого стрелка колеблется около определенного числа: у первого - около 4/5, у второго - около 3/10. Эти числа логично принять за оценку вероятности попадания. Эта оценка тем более надежна, чем больше проведено опытов с целью установления ее значения.

Можно на конкретном примере показать, что геометрический подход к вероятности события не зависит от вида измерений геометрического пространства: важно только, чтобы пространство элементарных событий и подпространство, представляющее событие А, были бы одинакового вида и одинаковых измерений.

С этой целью можно рассмотреть такой пример. С какой вероятностью стрелка вертушки, изображенной на рисунке (круг разделен на 8 равных частей), остановится на черном секторе? Для ответа на этот вопрос можно: вычислить площадь черных секторов и разделить ее на площадь всего круга, или найти суммарную длину дуг, ограничивающих черные секторы, и поделить ее на длину всей окружности.

Способ 2 лучше отражает суть нашего эксперимента, ведь фактически мы выбираем точку на окружности, в которой остановится острие стрелки. Отсюда искомая вероятность будет $P=(2\cdot\pi/4\bullet R)/(2\pi R)=1/4$.

Заметим, что тот же результат можно было получить и без привлечения геометрической вероятности, ведь вертушка поделена на 8 равных (значит равновозможных) секторов, из которых 2 выкрашены в черный цвет. Отсюда $P=2/8=1/4$.

Теперь рассмотрим пример, в котором геометрическое определение вероятности дает единственно возможный способ решения.

В квадрат со стороной 4 см «бросают» точку. Какова вероятность, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата будет меньше 1 см?

Изобразим квадрат со стороной 4 см и закрасим в нем множество точек, удаленных от ближайшей стороны квадрата меньше, чем на 1 см. Площадь закрашенной части квадрата составляет 16 см2 — 4 см2 = 12 см2. Отсюда искомая вероятность будет равна $P=12/16=3/4$.

Геометрический подход к определению вероятности может применяться и тогда, когда задача не имеет геометрической природы. Рассмотрим такой пример.

Поезда метро ходят с интервалом ровно 3 минуты. Какова вероятность того, что пассажир, пришедший на станцию в случайный момент времени, будет ждать поезда больше, чем 1 минуту?

Пассажиры, конечно же, не знают расписания поездов, и подходят на платформу в моменты времени, никак не связанные с движением поездов. Изобразим моменты прихода поездов на станцию точками на числовой оси Т1, Т2, ..., Тк, ... Эти точки отстоят одна от другой на 3 минуты. Момент прихода пассажира на станцию изобразим точкой Р на этой же оси. Легко заметить, что если расстояние от точки Р до первой, следующей за ней точкой Тк больше 1, то и ждать придется больше, чем 1 минуту (в остальных случаях ожидание не затянется больше, чем на минуту).

Пассажир Р1 уедет на своем поезде меньше, чем через минуту, а Р2 придется ждать больше 1 минуты. Поскольку момент появления пассажира на станции не связан с расписанием поездов, можно считать, что все моменты времени в промежутке между двумя поездами для него равноправны, то есть имеем право применять геометрические вероятности. Так как все отрезки [Тк-1; Тк] имеют одинаковую длину, а точка Р обязательно попадет на один из них, достаточно рассмотреть именно этот отрезок. С интересующим нас событием (ожидание больше 1 минуты) связан отрезок длины 2, а весь отрезок [Тк-1; Тк] имеет длину 3, следовательно, вероятность интересующего нас события равна отношению 2/3.

Учащиеся отлично знают, что плоская фигура имеет площадь. Они знают, что площадь, например, прямоугольника можно измерить физически, накладывая на него квадратик, принятый за единицу площади. Эту же площадь можно вычислить, предварительно определив длины сторон прямоугольника и затем перемножив их. Но при этом никому не приходит в голову говорить о разных площадях — измеренной и вычисленной. Есть одно понятие «площадь» и есть разные способы его определения. При этом слово «определение» следует понимать как нахождение величины, а не как раскрытие сущности понятия.

Аналогично можно подходить и к введению понятия вероятности. Разные случайные события происходят с разной относительной частотой: одни чаще, другие реже. Те события, которые происходят чаще, имеют большую возможность появления, а те, которые реже — меньшую. Иначе говоря, подобно тому, как каждая плоская фигура имеет свою меру пространственной протяженности — площадь, так и каждое случайное событие имеет свою меру возможности появления — вероятность. Как и площадь, эта мера может быть выражена числом. Находить это число, т.е. значение вероятности, можно в разных случаях по-разному. Можно проводить реальный эксперимент и считать число появлений события - это будет статистический подход к определению (нахождению значения) вероятности. В частном случае, когда количество элементарных исходов конечно и все эти исходы равновозможны, можно поступить иначе: подсчитать общее число возможных исходов и число исходов, благоприятных для рассматриваемого события, а затем разделить второе число на первое — это будет классический подход к определению вероятности. Итак, понятие вероятности одно, а способы нахождения значения вероятности разные.

Используются четыре подхода к формированию понятия вероятности: статистический, классический, геометрический и аксиоматический. При том или ином подходе к понятию вероятности вырисовывается единое ядро: вероятность — это специальная мера исследовательской деятельности.

3. Заключение

Анализ известных подходов к изучению элементов комбинаторики, теории вероятностей и статистики и мой личный опыт позволяют сделать следующие выводы. Для успешного введения элементов комбинаторики, теории вероятностей, статистики необходимо:

1. Начинать изучение материала в 5 классах (некоторые вопросы в начальной школе).

2. Дать законченное элементарное представление о комбинаторике, теории вероятностей и статистике и их тесной взаимосвязи. Подчеркивать тесную связь этих разделов математики с окружающим миром.

3. Избегать излишнего математического формализма; иллюстрировать материал яркими, доступными и запоминающимися примерами.

4. Использовать сквозные примеры и задачи при обсуждении разных тем. Подбирать примеры и задачи с учетом различных интересов и возрастных особенностей развития учащихся.

5. На протяжении всех лет обучения знакомить учащихся с вероятностно-статистическими подходами к анализу эмпирических данных, причем большую роль отводить задачам прикладного характера, анализу реальных ситуаций. Избегать утративших свою актуальность для общества примеров и задач.

6. Возможность повторения и закрепления на новом материале пройденного ранее.

7. В процессе обучения много времени отводить задачам, требующим от учащихся работы в малых группах, самостоятельного сбора данных, обобщения результатов работы групп, проведения самостоятельных исследований, работ практического характера, постановки экспериментов, проведения небольших лабораторных работ, подготовки долгосрочных заданий, дающих детям возможность ощутить себя первооткрывателями, так как все это диктуется своеобразием вероятностно-статистического материала, его тесной связью с практической деятельностью.

На мой взгляд, все это должно способствовать усвоению новых для учащихся понятий, росту интереса учащихся к математике в целом, формированию современного мировоззрения и умения ориентироваться в изменчивом информационном мире.

5. Список литературы

1. Антипов И.Н., Виленкин Н.Я. и др., Избранные вопросы математики, 9 кл.- М.: Просвещение,1979.
2. Афанасьев В.В. Вероятностные игры. - Математика № 14, № 15 2005.
3. Березина Л.Ю. Графы и их применение. М.: Просвещение,1979.
4. Бунимович Е.А., Булычев В.А., Вероятность и статистика, 5-9 кл.- М.: Дрофа, 2002.
5. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. М.: Просвещение, 1990.
6. Вестник образования России. № 12, № 14, 2004.
7. Виленкин Н.Я.. Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975.
8. Виленкин Н.Я., Потапов В.Г., Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики. – М., Просвещение, 1979.
9. Возрастные и индивидуальные особенности образного мышления учащихся. М, Педагогика, 1989г.
10. Крутецкий В.А. Психология обучения математике. М.: Просвещение, 1976.
11. Лютикас В.С., Школьнику о теории вероятностей. – М.: Просвещение, 1976.
12. Математика (приложение к газете «Первое сентября»), № 34, 35, 41, 43, 44, 48 2002; № 4, 11, 17, 44 2003; № 25, 26, 31, 34 2004; № 5,7, 9 2005.
13. Менчинская Н.А. Проблемы учения и умственного развития школьника. - М.,1989.
14. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач. – М., Наука, 1975.
15. Оганесян В.А. Методика преподавания математики в средней школе. М, Просвещение, 1980г.
16. Педагогика. Под ред. Бабанского Ю.К. М.: Просвещение, 1983.
17. Румшинский Л.З. Элементы теории вероятностей, М., Наука,1976.
18. Соболь И.М. Метод Монте-Карло. – М., Наука, 1968.
19. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990.
20. Тарасов Л.В. Мир, построенный на вероятности, М., Просвещение, 1984.
21. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний. – М.,1975.
22. Ткачева М.В. Анализ данных в учебниках Н.Я. Виленкина и других. — Математика в школе, № 5, 2003.
23. Холодная М.А. Психология интеллекта: парадоксы, исследования. - М-Томск, 1997г
24. Холл. М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
25. Школа в «Кванте».- № 2,1994.
26. Рыбников К.А. История математики. М.: МГУ, 1994.
27. Щукина В.А., Щукин Е.И. Случайные события. Ярославль,1995.

5. Приложение

Дидактические материалы к урокам.

Предлагаю для использования в своей работе дидактические материалы по теме «Комбинаторика», «Статистика» и «Теория вероятностей»

Урок №1

Тема урока: Элементы комбинаторики

Тип урока: Урок изучения нового материала

Вид урока: беседа

Цели урока:

- Познакомить учащихся с новым разделом математики – «Комбинаторика», с её основными понятиями и задачами, использованием в практических целях;
- Познакомить учащихся с основными приёмами подсчёта числа различных вариантов;
- Показать учащимся основные методы решения комбинаторных задач и закрепить их при решении примеров.

Фрагмент урока:

Мотивация на изучение новой темы: Вступительное слово учителя

В русских сказках повествуется, как, доехав до распутья, богатырь читает на камне: «Прямо поедешь – голову сложишь, направо поедешь – коня потеряешь, налево поедешь – меча лишишься». А дальше уже говорится, как он выходит из того положения, в которое попал в результате выбора. Но выбирать разные пути или варианты приходится и современному человеку. Эти пути и варианты складываются в разнообразные комбинации. И раздел математики, именуемый *комбинаторикой,* занят поисками ответов на вопросы: сколько комбинаций существует в том или ином случае, как из всех этих комбинаций выбрать наилучшую. Люди, владеющие техникой решения комбинаторных задач, а следовательно, умеющие рассуждать, перебирать различные варианты решений, часто находят выход, казалось бы, из самой безвыходной ситуации. Примером мог бы послужить сказочный герой, барон Мюнхаузен, который находил выход при любом условии. Но и в жизни эти умения очень часто помогают человеку. Вот один случай умелого решения комбинаторной задачи.

- Бесплатный обед

10 молодых людей решили отпраздновать окончание института товарищеским обедом в ресторане. Когда все собрались, и первое блюдо было подано, заспорили о том, как усесться вокруг стола. Одни предлагали разместиться в алфавитном порядке, другие – по возрасту, третьи – по успеваемости, четвёртые – по росту и т. д. спор затянулся, суп успел остыть, а за стол никто не садился. Примирил всех официант, обратившийся к ним с такой речью: - Друзья мои, оставьте ваши пререкания. Сядьте за стол, как придётся, и выслушайте меня. Все сели как попало. Официант продолжал: - Пусть один из вас запишет, в каком порядке вы сейчас сидите. Завтра вы снова явитесь сюда пообедать, и разместитесь уже в ином порядке. Послезавтра сядете опять по-новому и т. д., пока не перепробуете все возможные размещения. Когда же придёт черёд вновь сесть так, как сидите вы здесь сегодня, тогда я начну ежедневно угощать вас бесплатно самыми изысканными обедами

Предложение понравилось. Решено было ежедневно собираться в этом ресторане и перепробовать все способы размещения за столом, чтобы скорее начать пользоваться бесплатными обедами. Однако дождаться им этого дня им не пришлось. И не потому, что официант не исполнил обещания, а потому, что число всех возможных размещений за столом чересчур велико. Как вы думаете, чему оно равно? Оно равняется, ни мало, ни много, 3 628 800. Такое число дней составляет почти 10 тысяч лет! Это, на первый взгляд, невероятно, но так оно и есть! Ну, а мы с вами сегодня рассмотрим некоторые задачи этого раздела математики, который, ещё раз напомню, называется комбинаторикой. Мы познакомимся и научимся применять на практике несколько методов решения комбинаторных задач – задач, над решением которых мы задумываемся каждый день. Ведь в повседневной жизни нередко возникают проблемы, которые имеют несколько различных вариантов решения, и, чтобы сделать правильный выбор, важно не упустить ни один из них. Для этого надо осуществить перебор всех возможных вариантов или хотя бы подсчитать их число. Такого рода задачи называют *комбинаторными.*

Приложение к уроку

Комбинаторика от лат. combinare – означать, соединять, сочетать.

Урок № 2,3

Тема урока: Комбинаторные задачи

Тип урока: уроки по формированию умений и навыков.

Вид урока: решение задач, групповая работа.

Цели урока:

- Ввести понятие перестановки;
- Закрепить их знание в ходе выполнения упражнений;
- Развивать логическое мышление учащихся, формировать навыки работы в группе.

Эпиграф урока

- Если что-то непонятно,
- Это очень неприятно.
- Пусть тоска тебя не гложет,
- Рядом друг, и он поможет.

Для актуализации знаний можно использовать устный счёт:

Устные задачи:

Ну-ка, в сторону карандаши!

Ни костяшек. Ни ручек. Ни мела.

Устный счёт! Мы творим это дело

Только силой ума и души.

1. Сколькими способами двое учащихся могут занять места за одной двуместной партой в классе?
2. Назовите все двузначные числа, в записи которых встречаются только цифры 0,1,2, при условии, что в записи чисел цифры : а) различны б) могут повторяться.

3. Назовите все трёхзначные числа, в записи которых встречаются только цифры 4 и 5.
4. Четыре подруги решили обменяться фотографиями на память(причём каждая девочка подарила каждой подруге по фотографии). Сколько всего фотографий было подарено?

5.Ира и Оля пришли в магазин, где продавались в достаточном количестве шоколада «Алёнка», «Бабаевский» и «Вдохновение». Каждая из них купила по одной плитке. Сколько существует способов покупки?

На уроках можно организовать индивидуальную, парную или групповую работу, используя рабочие карточки с задачами:

1. Андрей зашёл в магазин, чтобы купить майки. В магазине оказались майки четырёх цветов: белые, голубые, красные, чёрные.
   а) сколько вариантов покупки есть у Андрея, если он хочет купить две майки? Подсказка. Обозначьте цвета маек буквами Б, Г, К, Ч. Запишите все возможные варианты покупки, осуществляя их перебор в алфавитном порядке.

   б) сколько вариантов покупки есть у Андрея, если он хочет купить две майки разного цвета?

   2. В 6-м классе изучается 8 предметов. Сколько различных вариантов расписания можно составить на понедельник, если в этот день должно быть 5 уроков и все разные? Подсказка. На первом уроке можно провести любой из 8 предметов, на втором уроке – любой из оставшихся 7 предметов, на третьем уроке … .

   3. Из класса, в котором учится 15 девочек и 10 мальчиков, нужно выбрать одну девочку и одного мальчика для ведения школьного вечера. Сколькими способами это можно сделать?

   4. Семеро друзей разъехались на новогодние каникулы. Перед Новым годом каждый из них послал всем остальным SMS-сообщения. Сколько всего сообщений было отправлено?

   5. В меню школьной столовой 2 разных супа, 4 вторых блюда и 3 вида сока. Сколько можно составить вариантов обеда из трёх блюд?

   6. Сколько трёхзначных чисел можно записать, используя только цифры 0,2,4,6?

   7. На встречу выпускников пришло 10 человек. Каждый с каждым обменялся рукопожатием. Сколько всего рукопожатий было совершено?

   8. В классе три человека хорошо поют, двое других играют на гитаре, а ещё один умеет показывать фокусы. Сколькими способами можно составить концертную бригаду из певца, гитариста и фокусника?

   9. Из нечётных цифр составляют все возможные числа, содержащие не более четырёх цифр. Сколько существует таких чисел?

10. После хоккейного матча каждый игрок одной команды обменялся рукопожатием с каждым игроком другой команды. Сколько всего игроков присутствовало на площадке, если было совершено 323 рукопожатия?

У учеников на столах лежат карточки с правилами поведения в группе:

Правила поведения в группе

1. Активно участвуй в совместной работе.
2. Внимательно выслушай собеседника.
3. Не перебивай собеседника, пока он не закончит свой рассказ.
4. Выскажи свою точку зрения по данному вопросу, будь при этом вежлив.
5. Не смейся над чужими ошибками и недостатками в работе, но тактично укажи на них.

6. Поблагодари партнёра за совместную работу.

Рефлексия деятельности:

- Оценить работу группы;
- Отметить наиболее активных членов группы;
- Оценить собственную деятельность на уроке;
- В каких ситуациях возможно применить полученные знания?

Чтобы оценить собственную деятельность на уроке можно использовать круговую диаграмму.
- поднимите руки те, кому было трудно, но интересно.
- поднимите руки те, кому было понятно, но остались вопросы.
- поднимите руки те, кому было всё понятно.
Количество поднятых рук подсчитывается и строится круговая диаграмма.

Дома: Создать презентацию своего проекта по обобщению пройденного материала.

Технологическая карта урока

Данные об учителе: Карманова Ольга Васильевна, МБОУ ООШ № 19 п. Железнодорожный , Борский район, Нижегородская область.

Предмет: математика

Класс: 9

Учебник (УМК): Ю. Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова под ред. С. А. Теляковского , 9 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений. - М.: Просвещение, 2012.

Тема урока: Перестановки

Тип урока: Урок изучения нового материала

Оборудование: доска; задания для выполнения на уроке; карточки самооценивания, экран, проектор или интерактивная доска задания для домашней работы.

Характеристика учебных возможностей и предшествующих достижений учащихся класса, для которого проектируется урок:

Учащиеся владеют

• *регулятивными УУД:*

- *формулировать вопросы по теме на основе опорных (ключевых и вопросительных) слов ;*
- *преобразовывать практическую задачу в учебно-познавательную совместно с учителем);*

• *познавательными УУД:*

- *собирать и выделять информацию, существенную для решения проблемы, под руководством учителя ;*

У большинства учащихся не сформированы:

• *коммуникативные УУД:*

- *навык работы в группе;*

- *высказывать свою точку зрения по инициативе учителя;*

• *личностные УУД:осуществлять рефлексию своего отношения к содержанию темы.*

Цели урока как планируемые результаты обучения, планируемый уровень достижения целей:

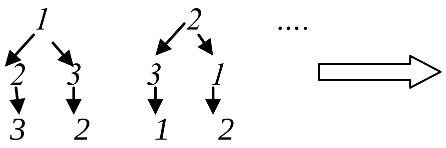
Вид планируемых учебных действий	Учебные действия	Планируемый уровень достижения результатов обучения
Предметные	уметь в процессе реальной ситуации использовать понятие перестановки	понимание, адекватное употребление в речи, выборочно — воспроизведение
	уметь решать основные типы комбинаторных задач используя понятие перестановки.	понимание, адекватное употребление в речи, выборочно — воспроизведение
Регулятивные	самостоятельно ставить новые учебные задачи путем задавания вопросов о неизвестном	самостоятельное действие учащихся по заданному алгоритму
	планируют собственную деятельность, определяют средства для ее осуществления	совместное с учителем действие учащихся на основе знания видов источников информации и способов работы с ними
Познавательные	закрепляют навыки и умения применять алгоритмы при решении задач; систематизируют знания, обобщают и углубляют знания при решении задач по теме «Перестановки».	самостоятельное действие учащихся по применению математических знаний для решения учебно-познавательных и учебно-практических задач
Коммуникативные	умение слушать и вступать в диалог; воспитывать чувство взаимопомощи, уважительное отношение к чужому мнению, культуру учебного труда, требовательное отношение к себе и своей работе.	совместные действия учащихся в условиях взаимопомощи и взаимоконтроля
Личностные	формировать внимательность и аккуратность в вычислениях; требовательное отношение к себе и своей работе.	самостоятельное выполнение действий с опорой на известный алгоритм

Структура и ход урока

Этап урока	Задачи этапа	Деятельность учителя	Деятельность учеников	Время (в мин)	Формируемые УУД
1. Организационный этап	Создать благоприятный психологический настрой на работу	Приветствие, проверка подготовленности к учебному занятию, организация внимания детей.	Включаются в деловой ритм урока.	1	**Коммуникативные:** планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками. **Регулятивные:** организация своей учебной деятельности
2. Актуализация знаний	Актуализация опорных знаний и способов действий.	Организация устного счета решения задач методом перебора или дерева вариантов.	Участвуют в работе по повторению: в беседе с учителем отвечают на поставленные вопросы.	3	**Познавательные:** структурирование собственных знаний. **Коммуникативные:** организовывать и планировать учебное сотрудничество с учителем и сверстниками. **Регулятивные:** контроль и оценка процесса и результатов деятельности. **Личностные:** оценивание усваиваемого материала.
3. Постановка цели и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся.	Обеспечение мотивации учения детьми, принятие ими целей урока.	Мотивирует учащихся, вместе с ними определяет цель урока; акцентирует внимание учащихся на значимость темы.	Записывают дату в тетрадь, определяют тему и цель урока.	15	**Познавательные:** умение осознанно и произвольно строить речевое высказывание в устной форме. **Личностные:** самоопределение. **Регулятивные:** целеполагание. **Коммуникативные:** умение вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении вопроса.
4. Физкультминутка	Смена деятельности.	Сменить деятельность, обеспечить эмоциональную разгрузку учащихся.	Учащиеся сменили вид деятельности и готовы продолжить работу.	1	
5. Применение знаний и умений в новой ситуации	Показать разнообразие комбинаторных задач, решаемых в жизни.	Организация и контроль за процессом решения задач.	Работают в парах над поставленными задачами.	15	**Познавательные:** формирование интереса к данной теме. **Личностные:** формирование готовности к самообразованию.

					Коммуникативные: уметь оформлять свои мысли в устной форме; слушать и понимать речь других. **Регулятивные:** планирование своей деятельности для решения поставленной задачи и контроль полученного результата.
6. Контроль усвоения, обсуждение допущенных ошибок и их коррекция.	Дать качественную оценку работы класса и отдельных учеников	Выявляет качество и уровень усвоения знаний, а также устанавливает причины выявленных ошибок.	Учащиеся анализируют свою работу, выражают вслух свои затруднения и обсуждают правильность решения задач.	4	**Личностные:** формирование позитивной самооценки**.** **Регулятивные:** умение самостоятельно адекватно анализировать правильность выполнения действий и вносить необходимые коррективы.
7. Рефлексия (подведение итогов урока)	Дать качественную оценку работы учащихся	Подводит итоги работы групп и класса в целом.	Учащиеся сдают карточки самооценивния.	3	**Регулятивные:** оценивание собственной деятельности на уроке
8. Информация о домашнем задании	Обеспечение понимания детьми содержания и способов выполнения домашнего задания	Дает комментарий к домашнему заданию	Учащиеся записывают в дневники задание.	3	

Ход урока

Этапы урока	Деятельность учителя	Деятельность учеников
1. Организационный этап	***Учитель** приветствует учащихся, проверяет их готовность к уроку.* - У каждого из вас на столах лежат карточки самооценивания. Подпишите их. В течение урока мы с вами будем выполнять различные задания. По окончанию решения каждой задачи, вы должны оценить свою работу: "+" - справился с задачей без затруднений, "±" - справился с задачей, но возникали сложности,(слайд приложения №1) "-" - не справился с задачей.	*Учащиеся слушают учителя, подписывают карточки самооценивания*
2. Актуализация знаний	***Устный счет:*** Ну-ка, в сторону карандаши! Ни костяшек. Ни ручек. Ни мела. Устный счёт! Мы творим это дело Только силой ума и души (слайд 1) 1) сколькими способами трое друзей могут сесть на одной трехместной скамейке? *Решение: 6способов: 123,321,213,231,312,132 –способ перебора вариантов,*  *6 вариантов(слайд 2).* 2) Назовите все двузначные числа, в записи которых встречаются только цифры 0,1,2, при условии, что в записи чисел цифры : а) различны б) могут повторяться. *Ответ: а) 6,б)27(слайд 3)*	*Учащиеся устно выполняют предложенные задания.*
3. Этап изучение нового материала.	В русских сказках повествуется, как, доехав до распутья, богатырь читает на камне: «Прямо поедешь – голову сложишь, направо поедешь – коня потеряешь, налево поедешь – меча лишишься». А дальше уже говорится, как он выходит из того положения, в которое попал в результате выбора. Но выбирать разные пути или варианты приходится и современному человеку. Эти пути и варианты складываются в разнообразные комбинации. И раздел математики, именуемый *комбинаторикой,* занят поисками ответов на вопросы: сколько комбинаций существует в том или ином случае, как из всех этих комбинаций выбрать наилучшую. Люди, владеющие техникой решения комбинаторных задач, а следовательно,	

	умеющие рассуждать, перебирать различные варианты решений, часто находят выход, казалось бы, из самой безвыходной ситуации. Примером мог бы послужить сказочный герой, барон Мюнхаузен, который находил выход при любом условии. Но и в жизни эти умения очень часто помогают человеку. Вот один случай умелого решения комбинаторной задачи.(слайд 4) *10* молодых людей решили отпраздновать окончание института товарищеским обедом в ресторане. Когда все собрались, и первое блюдо было подано, заспорили о том, как усесться вокруг стола. Одни предлагали разместиться в алфавитном порядке, другие – по возрасту, третьи – по успеваемости, четвёртые – по росту и т. д. спор затянулся, суп успел остыть, а за стол никто не садился. Примирил всех официант, обратившийся к ним с такой речью: - Друзья мои, оставьте ваши пререкания. Сядьте за стол, как придётся, и выслушайте меня. Все сели как попало. Официант продолжал: - Пусть один из вас запишет, в каком порядке вы сейчас сидите. Завтра вы снова явитесь сюда пообедать, и разместитесь уже в ином порядке. Послезавтра сядете опять по-новому и т. д., пока не перепробуете все возможные размещения. Когда же придёт черёд вновь сесть так, как сидите вы здесь сегодня, тогда я начну ежедневно угощать вас бесплатно самыми изысканными обедами Предложение понравилось. Решено было ежедневно собираться в этом ресторане и перепробовать все способы размещения за столом, чтобы скорее начать пользоваться бесплатными обедами. Однако дождаться им этого дня им не пришлось. И не потому, что официант не исполнил обещания, **а почему же?**а потому, что число всех возможных размещений за столом чересчур велико. Как вы думаете, чему оно равно? Сегодня мы попытаемся ответить на этот вопрос. Что будут делать друзья каждый раз посещая ресторан? Все ваши ответы можно объединить одним словом «Перестановки» Комбинаторика от лат. combinare – означать, соединять, сочетать. Сегодня после обсуждения новой темы мы закрепим знания работая в парах. ***Тема нашего урока***: Перестановки. ***Наша цель на уроке*** – давайте сформулируем ее вместе Ответе на вопросы: 1. какое понятие мы должны изучить? 2. какой форме взаимодействия мы должны уметь совершать работу на уроке?	*Учащиеся предлагают свои решения.* *Дети предлагают варианты ответов(вариантов пересадки студентов слишком много)* *Дети дают ответы: слова синонимы «перестановки»(переставлять пересаживатьи т.п.)* *Отвечают на поставленный вопрос.* 1. Изучить понятие перестановки; 2. *Уметь работать в*

	3. для чего будем решать задачи?	*парах* 3. *Для закрепления изучееного.* *Формулируют тему и цель урока, задачи. Записывают в тетради дату и тему урока.*
Этап первичное осмысление и закрепление знаний	Рассмотрим 5 квадратов различных цветов (красный, синий, зеленый, розовый, желтый)(слайд 5) Рассматриваем пример с построением ленты из 5 квадратов,. Каким минимальным признаком могут отличаться узоры двух пестрых лент, построенных из одинакового количества квадратов? **Обозначение числа перестановок** P_n **(от фр. "permutation") -** Каким минимальным признаком может отличиться одна выборка объема *n=5* от другой выборки такого же объема? Минимальным признаком, отличающим одну выборку объема n от другой выборки такого же объема, может быть (установление существенных признаков): их различие порядком расположения элементов. Назовем такие выборки перестановками из *n* элементов . *Попробуйте построить понятие «Перестановки»* Считаем число лент составленных из 5 различных квадратов. Вспомним дерево вариантов. Напоминаю что такое факториал , который мы с вами изучали на предыдущем уроке(слайд 7) Получаем *5!* Попробуем обобщить формулу для любого числа предметов, объектов. Пусть лента не 5, а n - цветная	*Ответы учащихся: отличаются составом квадратов, порядком расположения квадратов.* *Перестановкой из* n *элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке.(Запись в тетрадь)* *Ученики самостоятельно строят дерево и подсчитывают варианты: 120 вариантов. Более сильные учащиеся: 5!* *n* *n-1*

	Сколько вариантов поставить квадрат на 1 место На 2место? На 3 место? На n место? Примените правило умножения для дерева вероятностей и вывеете формулу для подсчета количества перестановок. (Работа в парах) Действительно по определению имеем: $P_n = n(n-1)(n-2)... 3 \cdot 2 \cdot 1$, т. е. $P_n = n!$ Вспомним задачу про студентов : сколько же перестановок у нас получится за столом в ресторане? Однако не забудьте вопрос задачи! Почему студенты не пообедали бесплатно? Оно равняется, ни мало, ни много, 3 628 800.Сколько лет примерно составит такое количество дней?(слайд 8) Верно такое число дней составляет почти 10 тысяч лет! Это, на первый взгляд, невероятно, но так оно и есть! Ну, а мы с вами сегодня рассмотрим некоторые задачи этого раздела математики, который, ещё раз напомню, называется комбинаторикой. Мы научимся применять на практике еще один метод решения комбинаторных задач, над решением которых мы задумываемся каждый день. Ведь в повседневной жизни нередко возникают проблемы, которые имеют несколько различных вариантов решения, и, чтобы сделать правильный выбор, важно не упустить ни один из них. Для этого надо осуществить перебор всех возможных вариантов или хотя бы подсчитать их число.	*1* *Учащиеся формулируют и записывают в тетради формулу* *Представители 2-3 пар выходят к доске и пишут варианты* *В парах при помощи калькулятора дети считают число вариантов. И количество лет необходимых на перебор вариантов*
Физпауза	*Давайте немного отдохнем.* Исходное положение: все сидят; учитель, закрыв глаза (лучше отвернувшись), задает классу число - и выбрасывает над головой соответствующее количество пальцев (если число больше пяти, понадобятся обе руки, - это замечание не для	*Учащиеся поднимаются с мести выполняют необходимые упражнения.*

	математиков). Затем он произносит: «Раз-два-три! Замри!» - Открывает глаза (возвращается к ученикам). В классе должно стоять ровно столько учеников, сколько пальцев им было предъявлено. При выполнении игрового задания каждому из учеников приходится быстро сориентироваться: если количество меньше заданного - встать самому, если же больше - то мгновенно сесть. Изюминка этого упражнения - в своеобразной мобилизации всех участников.	
Применение знаний и умений в новой ситуации	(слайд приложения №2)А теперь, у вас на столах лежат правила поведения при работе в группах, прочитайте их, пока я раздаю задания (по 1 на пару). После прочтения правил приступайте к решению задачи в паре со своим соседом. Номер карточки и результат решения запишите в тетради.(если пара быстро справилась с задачей, дети могут получить задание группы у которой дела идут плохо при необходимости помочь дойти до правильного ответа)	*Учащиеся в парах выполняют решение предложенных задач. При необходимости могут использовать калькуляторы, имеющиеся на столах. По окончании работы над каждой задачей, оценивают результат своей деятельности на листах оценивания.*
Контроль усвоения, обсуждение допущенных ошибок и их коррекция.	Обходит по мере работы в группе учащихся, выбирает ошибочные моменты и корректирует работу пары	*Учащиеся корректируют работу*
Рефлексия (подведение итогов урока). **Информация о домашнем задании**	*Собираются карточки самооценивания и выставляются оценки за работу на уроке.* **Домашнее задание:** 1)Выучить определение «перестановки» и формулу для ее нахождения. 2)Найти в словаре слова «переставить» и «разместить», подумать в чем разница смысла этих слов.(метапредметные умения) 3) №741-743	*Учащиеся сдают карточки самооценивания.* *Учащиеся записывают домашнее задание в дневники*

Карточка самооценивания.

Ф. И. ____

Система оценивания:
"+" - справился с задачей без затруднений,
"±" - справился с задачей, но возникали сложности,
"-" - не справился с задачей.

№ задания	Задание	Оценка
1	Устный счет	
2	Формулировка определения перестановки	
3	Решение задачи о находчивом официанте.	
4	Решение задачи в паре	

Если у вас: 4- 4,5 «+» - ставим оценку «5»;
4- 3,5 «+» - «4»;
3-2 «+» - «3».

Правила поведения в группе

7. Активно участвуй в совместной работе.
8. Внимательно выслушай собеседника.
9. Не перебивай собеседника, пока он не закончит свой рассказ.
10. Выскажи свою точку зрения по данному вопросу, будь при этом вежлив.
11. Не смейся над чужими ошибками и недостатками в работе, но тактично укажи на них.
12. Поблагодари партнёра за совместную работу.

Задачи для работы в классе

1) Квартет

Проказница Мартышка

Осёл,

Козёл,

Да косолапый Мишка

Затеяли играть квартет…

Стой, братцы стой! –

Кричит Мартышка, - погодите!

Как музыке идти?

Ведь вы не так сидите…

И так, и этак пересаживались – опять музыка на лад не идет.

Вот пуще прежнего пошли у них разборы

И споры,

Кому и как сидеть…

Сколькими способами можно рассадить музыкантов? Сколько дней они будут давать разные концерты если будут играть после завтрака , обеда и ужина?

3) У Лены есть 8 разных красок. Она хочет написать ими слова «Новый Год». Сколькими способами она может это сделать, если каждая буква может быть раскрашена одним цветом и все 8 букв должны быть разные по цвету.

4) Сколькими способами можно установить дежурство по одному человеку в день среди семи учащихся группы в течение семи дней? Успеют ли применить все способы если в году 35 учебных недель?

5) Сколькими способами можно разместить 12 человек за столом, на который поставлено 12 приборов?

6) Сколькими способами можно выписать в колонку фамилии 30 учеников? Решение. $P30 = 30!$

7) Сколько различных 5-значных чисел, все цифры которых различны можно записать с помощью цифр 4, 5, 6, 7, 8?

8) Сколькими способами можно расставить на полке 8 книг, если среди них 2 книги одного автора, которые при любых перестановках должны стоять рядом?

9) У Атоса, Портоса и Арамиса на всех имеется одна шпага, один кинжал и один пистолет. Сколько у них способов распределить оружие так, чтобы все были вооружены?

10) Четыре лектора должны прочитать по одной лекции. Сколько имеется вариантов составления расписания?

11) Капитан Жеглов рассматривает фотографии. Всего их у него 25. Сколько существует различных последовательностей их рассматривания?

12) У мамы есть один апельсин, одна груша, одно яблоко и один банан. Она хочет раздать их четверым детям так, чтобы каждому достался какой-нибудь фрукт. Сколько имеется вариантов это сделать?

13) (для сильных учащихся) Напомним, что анаграмма – это слово, полученное из данного слова перестановкой его букв (но не обязательно имеющее смысл). Сколько существует различных анаграмм слова а) график; б) интеграл; в) факториал; г) перестановка; д) комбинаторика?

14) Одна сигарета содержит до 1,2 мг никотина. При курении 2/3 дыма попадает в воздух. Выясните, сколько никотина окажется в воздухе комнаты, в которой курильщик выкурил 10 сигарет? При этом известно, что смертельная доза яда – 40 мг. Сколько процентов смертельной дозы

яда будет в воздухе?(задача включена в каждую карточку, для актуализации знаний о дробях и %)

Самоанализ			
Этапы урока	**Уровень достижения планируемого результата**	**Возможные риски**	**Коррекционная работа**
Стадия Вызова	**Регулятивные действия** - Целеполагание как способность соотносить то, что уже известно и усвоено, и то, что еще неизвестно - Планирование как определение последовательности промежуточных целей с учетом конечного результата **Познавательные действия** - Самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели - Выделение наиболее важной информации - Построение логической цепочки вопросов **Коммуникативные действия** - Включаемость в коллективное обсуждение вопросов - Постановка вопросов **Личностные действия** - Развитие познавательных интересов, учебных мотивов **Предметные действия** -Воспроизведение (актуализация) знаний о комбинаторных задачах. -Определение основных направлений в изучении темы	1. Ученики не могут сформулировать цель и задачи урока	1. Помогает с помощью опорных слов: вспомнить, повторить…
Стадия Содержания	**Регулятивные действия** - Оценка как выделение и осознание того, что уже освоено и что еще подлежит усвоению, осознание качества и уровня усвоения - Волевая саморегуляция как способность к мобилизации сил и энергии **Познавательные действия** - Поиск и выделение необходимой информации - Выбор способа действия	1.Ученики затрудняются в определении вида задач, соответственно возникают трудности при решении 2.Ученики не могут работать в паре,	1. Учитель может индивидуально подойти и помочь тем, у кого возникли трудности 2. Учитель заранее подбирает пары или пересаживает учеников так, чтобы им было более

	- Умение осознанно применять полученные знания на практике **Коммуникативные действия** - Умение слушать и вступать в диалог - Инициативное сотрудничество в поиске и сборе информации **Личностные действия** - Развитие познавательных интересов, учебных мотивов **Предметные действия** - Построение нового знания о перестановках - Применение понятия перестановка при решении задач - Анализ информации по теме «Перестановки»	возникают трудности в общении 3.Ученик отказывается работать в паре. 4. Ученики не знают, как применять полученные знания на практике.	удобно работать 3.Работа может протекать индивидуально, со стороны учителя активная поддержка и необходимая помощь. 4. Еще раз обсудить задание, вспомнить правила и разобрать один из примеров.
Стадия рефлексии	**Регулятивные действия** - Оценка как выделение и осознание того, что уже освоено и что еще подлежит усвоению, осознание качества и уровня усвоения **Познавательные действия** Умение осознанно строить речевое высказывание в устной форме - Выделение и формулирование познавательной цели **Коммуникативные действия** - Включаемость в коллективное обсуждение вопросов - Постановка вопросов - Умение аргументировать свою точку зрения **Личностные действия** - Оценка действий человека -Развитие познавательных интересов, учебных мотивов **- Предметные действия** - Применение знаний о перестановках при решении практических заданий - Способность использовать полученные знания на практике	1. Ученики не могут оценить свою работу. 2. Ученики не знают, где именно искать информацию по данной теме, если возникнут затруднения при выполнении домашней работы	1. Учитель может еще раз разобрать критерии оценивания как индивидуально так и на весь класс 2. Обратить внимание учеников на п. 31, подсказать, что они могут подойти как к учителю, так и к родителям за помощью.

Литература:

1. Антипов И.Н., Виленкин Н.Я. и др., Избранные вопросы математики, 9 кл.- М.: Просвещение,1979.
2. Афанасьев В.В. Вероятностные игры. - Математика № 14, № 15 2005.
3. Березина Л.Ю. Графы и их применение. М.: Просвещение,1979.
4. Бунимович Е.А., Булычев В.А., Вероятность и статистика, 5-9 кл.- М.: Дрофа, 2002.
5. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. М.: Просвещение, 1990.

Контрольная работа №6

Вариант 1

1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 0,1, 3, 5, 8? Сколько из них четных?

2. Вычислите: 14!/4!*10!

3. Сколькими способами можно обозначить вершины прямоугольного параллелепипеда буквами C, D, F, G, К, L, M, N?

4. Случайным образом выбрали двузначное число. Какова вероятность того, что остаток от его деления на 7 равен 3?

5. На детской экспериментальной гидрометеостанции ученик производил замер температуры воздуха в течение 15 дней апреля в одно и то же время и получил следующий ряд значений: 4,1; 4,3; 5,2; 4,5; 5,8; 4,3; 5,2; 3,7; 4,1; 4,5; 4,5; 4,3; 5,2; 5,2 (в °С).

   а) Составьте таблицу распределения данных и распределения частот.

   б) Найдите размах, моду и среднее значение.

Вариант 2

1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 0,2, 4, 5, 7? Сколько из них нечетных?

2. Вычислите : 20!/3!*17!.

3. Сколькими способами можно обозначить вершины восьмиугольника буквами C, D, M, N, U, V,T, Q?

4. Случайным образом выбрали двузначное число. Какова вероятность того, что остаток от его деления на 8 равен 5?

5. На детской экспериментальной гидрометеостанции ученик производил замер температуры воздуха в течение 15 дней мая в одно и то же время и получил следующий ряд значений: 12,4; 12,4; 12,8; 14,1; 15; 15; 14,8; 14,1; 13,9; 13,5; 15; 15; 14,8; 14,1; 12,4 (в °С).

а) Составьте таблицу распределения данных и распределения частот.

б) Найдите размах, моду и среднее значение.

Вариант работы состоит из трёх частей. Первая часть (№1-№3) включает материал, соответствующий базовому уровню математической подготовки учащихся. Выполнение этой части контрольной работы гарантирует школьнику получение удовлетворительной оценки. Вторая часть (№4) содержит задание несколько более сложное с технической точки зрения. Третья часть (№5) включает задание, которое в определённом смысле можно охарактеризовать как творческое. Чтобы получить хорошую оценку, учащийся должен выполнить, кроме базовой. Вторую или третью часть работы. Для получения отличной оценки учащемуся